NOTIZEN

Eine Bemerkung zur Ableitung der Streuamplitude für Elekronenstreuung an Atomen nach Glauber und Schomaker

H. DREIZLER

Physikalisches Institut der Universität Freiburg i. Br.

(Z. Naturforschg. **21 a**, 475 [1966]; eingegangen am 14. Februar 1966)

In letzter Zeit zeigte es sich, daß bei einer Auswertung der Beugungsbilder, die bei der Streuung von schnellen Elektronen (10 – 40 keV) an freien Molekülen entstehen, die erste BORNsche Näherung der Streutheorie nicht ausreicht, um verläßliche Angaben über die Molekülstruktur zu erhalten. In einem ersten Beitrag zu diesem Problem wiesen GLAUBER und SCHOMAKER [1, 2] nach, daß es besonders bei Molekülen, die aus Atomen mit sehr unterschiedlichen Kernladungszahlen aufgebaut sind, notwendig ist, mit komplexen Streuamplituden zu arbeiten. Als Näherung schlugen sie vor, für den Betrag der komplexen Streuamplitude $f(\boldsymbol{K}',\boldsymbol{K})$ die BORNsche Streuamplitude $f_B(\boldsymbol{K}',\boldsymbol{K})$ und für deren Phase

$$\eta(\boldsymbol{K}',\boldsymbol{K}) = \frac{|\boldsymbol{K}|}{4\pi f_B(\boldsymbol{K}',\boldsymbol{K})} \int f_B(\boldsymbol{K}',\boldsymbol{K}'')\, f_B(\boldsymbol{K}'',\boldsymbol{K})\, d\Omega_{\boldsymbol{K}''} \qquad (G+S\,11)$$

zu wählen. GLAUBER und SCHOMAKER verwendeten u. a. die Formel

$$\frac{1}{2i}\{f(\boldsymbol{K}',\boldsymbol{K}) - f^*(\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}')\} = \frac{|\boldsymbol{K}|}{4\pi}\int f^*(\boldsymbol{K}'',\boldsymbol{K}')\, f(\boldsymbol{K}'',\boldsymbol{K})\, d\Omega_{\boldsymbol{K}''} = I \qquad (G+S\,7)$$

Deren Beweis deuteten sie an, führten ihn aber nicht aus. Mir scheint es nützlich, einen anderen Beweis zu (G + S 7) mitzuteilen. Die folgende Abb. 1 verdeutlicht die auftretenden Wellenvektoren.

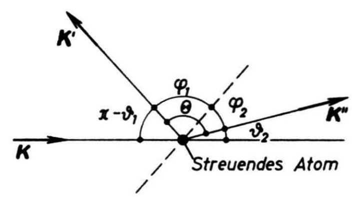

Abb. 1. Lage der Wellenvektoren $\boldsymbol{K}$, die nicht notwendigerweise in einer Ebene liegen. Winkel Θ zwischen $\boldsymbol{K}'$ und $\boldsymbol{K}''$.

Ich gehe aus von der Formel von FAXÉN und HOLTSMARK [3]

$$f(\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}') = \frac{1}{2i|\boldsymbol{K}|}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(\exp\{2i\delta_l\}-1)\,P_l(\cos\vartheta). \tag{1}$$

Mit (1) erhält man für fest gewählte $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}'$ für das Integral I

$$I = \frac{|\boldsymbol{K}|}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4\boldsymbol{K}^2}\Big(\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(\exp\{-2i\delta_l\}-1)\,P_l(\cos\Theta)\Big)\Big(\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(\exp\{2i\delta_l\}-1)\,P_l(\cos\vartheta_2)\Big) \cdot \sin\vartheta_2\, d\vartheta_2\, d\varphi_2\,. \tag{2}$$

Dabei ist also vorausgesetzt, daß der Streuer (Atom) eine solche Symmetrie hat, daß die Streuamplitude von φ nicht abhängt. Mit dem Addititionstheorem für die LEGENDREschen Polynome [4] $P_l(\cos\Theta)$

$$P_l(\cos\Theta) = P_l(\cos\vartheta_1)\,P_l(\cos\vartheta_2) + 2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,P_l^m(\cos\vartheta_1)\,P_l^m(\cos\vartheta_2)\,\cos m(\varphi_1-\varphi_2) \tag{3}$$

deren Orthogonalitätsrelation [5]

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos\vartheta_2)\,P_{l'}(\cos\vartheta_2)\,\sin\vartheta_2\,d\vartheta_2 = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'} \tag{4}$$

und

$$\int_0^{\pi}\cos m(\varphi_1-\varphi_2)\,d\varphi_2 = 0 \text{ für } m \neq 0 \quad \text{folgt:}$$

$$I = \frac{1}{4|\boldsymbol{K}|}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(2-\exp\{-2i\delta_l\}-\exp\{2i\delta_l\})\,P_l(\cos\vartheta_1). \tag{5}$$

Diese Größe ist aber unter Beachtung von (1)

$$I = \frac{1}{2i}\{f(\boldsymbol{K}',\boldsymbol{K}) - f^*(\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}')\}, \tag{6}$$

womit (G + S 7) bewiesen ist.

[1] R. GLAUBER u. V. SCHOMAKER, Phys. Rev. **89**, 667 [1953].

[2] Weitere Literatur in dem zusammenfassenden Artikel von A. ALMENNINGEN, O. BASTIANSEN u. A. HAALAND, Angew. Chem. internat. Edit. **4**, 819 [1965]; Angew. Chem. **77**, 877 [1965].

[3] H. FAXÉN u. J. HOLTSMARK, Z. Phys. **45**, 307 [1927].

[4] Zum Beispiel H. MARGENAU u. G. M. MURPHY, The Mathematics of Physics and Chemistry, D. van Nostrand Co., Princeton 1956 (Sec. Edition), p. 112.

[5] Siehe z. B. [4], p. 109.